

1. α) Νά δοθεί παράδειγμα (γραφικά) μιᾶς κατὰ τμήματα διαφορίσιμης κλειστῆς καμπύλης  $\gamma$  στὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο τῆς ὁποίας ὁ δείκτης στροφῆς ὡς πρὸς τὸ σημεῖο  $i$  νὰ εἶναι  $+2$ , ὡς πρὸς τὸ σημεῖο  $-i$  νὰ εἶναι  $-3$  καὶ ὡς πρὸς τὸ σημεῖο  $-1-i$  νὰ εἶναι  $+1$ . [1.0]

β) Ἄν  $\gamma$  εἶναι μιὰ καμπύλη ὅπως παραπάνω, νὰ ὑπολογιστοῦν τὰ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{\sin(z^2 - 1)}{z^2 + 1} dz, \quad \int_{\gamma} \frac{z^3 - i}{z^2 + (1 + 2i)z - 1 + i} dz. \quad [1.0]$$

2. Νά βρεθοῦν τὰ σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου στὰ ὁποῖα ἡ συνάρτηση μετὰ τύπο

$$f(z) = \left| z - \frac{1}{2} \right|^2 + \left| z + \frac{1}{2} - 2i \right|^2$$

εἶναι παραγωγίσιμη. Ἐπίσης, νὰ βρεθοῦν οἱ παράγωγοι στὰ σημεῖα αὐτά. [1.5]

3. Νά ἐξεταστεῖ ἂν ὑπάρχει ὁλόμορφη μιγαδικὴ συνάρτηση  $f$  ποὺ ἔχει φανταστικὸ μέρος τῆ συνάρτηση μετὰ τύπο

$$v(x, y) := 3x^2y - y^3 + y$$

καὶ ικανοποιεῖ τὴ σχέση  $f(i) = 2016$ . [1.5]

4. Νά ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + (\sin t)^2}. \quad [1.5]$$

5. α) Νά δοθεῖ ὁ ἀναλυτικὸς ὁρισμὸς τῆς μιγαδικῆς συνάρτησης μετὰ τύπο  $f(z) := \sin z$  καὶ νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι αὐτὴ ὀρίζεται σὲ ὅλο τὸ μιγαδικὸ ἐπίπεδο. [1.0]

β) Στὴ συνέχεια νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ (ὡς πρὸς  $z$ ) ἐξίσωση

$$e^{i \sin z} = w,$$

ὅπου  $w \neq 0$ . [1.0]

6. Νά ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} (z^2 + 3z^{\frac{1}{4}}) dz,$$

ὅπου  $z^{\frac{1}{4}}$  εἶναι ὁ κλάδος τῆς 4ης ρίζας τοῦ  $z$  γιὰ τὸν ὁποῖο ἰσχύει  $1^{\frac{1}{4}} = -i$  καὶ  $\gamma$  εἶναι ὁ θετικὰ προσανατολισμένος μοναδιαῖος κύκλος μετὰ κέντρο τὸ 0. [1.5]